

Concurs de admitere la Facultatea de Matematică și Informatică
Sesiunea Iulie 2019
Soluții și barem de corectare la Matematică

Subiectul 1 În mulțimea $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A(x) = \begin{pmatrix} 1+5x & -2x \\ 10x & -4x+1 \end{pmatrix}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

- i) Să se calculeze $(A(1) - I_2)^3$.
- ii) Să se verifice că $A(x)A(y) = A(x+y+xy)$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- iii) Să se calculeze produsul $A(1) \cdot A(2) \cdot \dots \cdot A(2019)$.

Barem: Start (1p)

i) Se obține $(A(1) - I_2)^2 = (A(1) - I_2)^3 = A(1) - I_2$ (2p)

ii) Notând $B = A(1) - I_2$ avem că $A(x) = I_2 + xB$, cu $B^2 = B$ (1p)

$A(x)A(y) = (I_2 + xB)(I_2 + yB) = I_2 + xB + yB + xyB^2 = I_2 + (x+y+xy)B = A(x+y+xy)$.. (2p)

iii) Conform punctului anterior $A(x)A(y) = A((x+1)(y+1)-1)$ (1p)

Inductiv $A(x_1)A(x_2) \dots A(x_n) = A((x_1+1)(x_2+1) \dots (x_n+1)-1)$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ (2p)

În particular $A(1)A(2) \dots A(2019) = A(2020! - 1)$ (1p)

Subiectul 2 Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 - pX^2 + (p+1)X + 1$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

- i) Determinați $p \in \mathbb{R}$ pentru care $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$.
- ii) Să se arate că, pentru orice $p \in \mathbb{R}$, polinomul f nu este divizibil cu $X^2 - 1$.
- iii) Dacă $p = 1$ calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ și arătați că f are o singură rădăcină reală.

Barem: Start (1p)

i) Conform relațiilor lui Viéte $x_1 + x_2 + x_3 = p$, $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = p+1$, iar $x_1x_2x_3 = -1$ (1p)

Deoarece $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -p-1$ (1p)

se obține că egalitatea este adevărată dacă și numai dacă $p = -p-1$, sau echivalent, $p = -\frac{1}{2}$ (1p)

ii) Deoarece rădăcinile polinomului $X^2 - 1$ sunt 1 și -1, rezultă că $X^2 - 1 \mid f$ dacă și numai dacă $f(1) = f(-1) = 0$ (1p)

Dar $f(1) = 3 \neq 0$ și deci $X^2 - 1$ nu divide polinomul f (1p)

iii) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = -3$ (1p)

Cum $\text{grad } f = 3$ (impar) rezultă că cel puțin o rădăcină este reală (1p)

Presupunând, prin reducere la absurd, că toate rădăcinile lui f sunt reale ar trebui să avem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$ ceea ce contrazice calculul de mai sus (1p)

Dacă $x_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este o rădăcină complexă dar nereală, cum $f \in \mathbb{R}[X]$, avem că $x_2 := \overline{x_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ este de asemenea rădăcină (1p)

Subiectul 3 Se consideră funcția $f : (-\infty, -3) \cup (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \frac{3}{x}\right)$.

i) Să se arate că funcția f este concavă pe $(-\infty, -3)$.

ii) Să se determine limita șirului $(a_n)_{n \geq 1}$, unde

$$a_n = n \left(f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n) - \ln \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \right), n \geq 1.$$

iii) Să se arate că există $c \in (2, 3)$ astfel încât $(c-2)f'(c) + f(c) = \ln 2$.

Barem: Start (1p)

i) Avem $f'(x) = \frac{1}{x+3} - \frac{1}{x}$, iar $f''(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+3)^2} = \frac{6x+9}{x^2(x+3)^2}$, $x \in (-\infty, -3) \cup (0, \infty)$ (1p)

Deoarece $6x+9 < 0$ pentru orice $x \in (-\infty, -3)$, rezultă că $f''(x) < 0$, pentru orice $x < -3$, ceea ce arată că funcția f este concavă pe intervalul $(-\infty, -3)$ (1p)

ii) Avem $f(1) + f(2) + \dots + f(n) = \sum_{k=1}^{n+3} \ln k - \sum_{k=1}^n \ln k = \ln \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$, pentru orice $n \geq 1$ (1p)

Rezultă că $a_n = n \ln \frac{n+3}{n}$, $n \geq 1$ (1p)

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \ln \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{n}{3}} = 3 \ln e = 3$ (2p)

iii) Funcția $g : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (x-2)f(x)$ este continuă pe $[2, 3]$ și derivabilă pe $(2, 3)$ cu $f'(x) = (x-2)f'(x) + f(x)$, $x \in (2, 3)$ (1p)

Conform Teoremei lui Lagrange, există $c \in (2, 3)$ astfel încât $g(3) - g(2) = (3-2)g'(c)$, ceea ce este echivalent cu $\ln 2 = (c-2)f'(c) + f(c)$ (2p)

Subiectul 4 Se consideră funcțiile $f, g : [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$, $g(x) = (x+1) \ln x - x + 1$.

i) Să se arate că funcția g este o primitivă a funcției f .

ii) Calculați aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f axa Ox și dreptele de ecuație $x = 1$ și $x = e$.

iii) Calculați $\int_1^2 f(x)g(x)dx$.

Barem: Start (1p)

i) Calculează g' și observă că $g' = f$ pe $[1, \infty)$ (2p)

ii) Cum $f(x) \geq 0$, $x \geq 1$, rezultă că $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e f(x) dx = g(e) - g(1) = 2$ (3p)

iii) Avem că $f(x)g(x) = \left(\frac{1}{2}g^2\right)'(x)$, $x \geq 1$ (2p)

Cu formula Leibnitz-Newton se obține că $\int_1^2 f(x)g(x)dx = \frac{1}{2}g^2(x)\Big|_1^2 = \frac{(3 \ln 2 - 1)^2}{2}$ (2p)

Notă: Orice altă variantă de rezolvare corectă se punctează corespunzător.